受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和７年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1（30点）

（１）

①	微分係数	②	増減	③	局所的	④	過程

（２）

（ア）

【証明】例①

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

【証明】例②

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx$$
$$=0-\frac{1}{6}[(x-\alpha)^3]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

（イ）

$a>0$ より，$f(x)$ は下に凸の放物線であり，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $f(x)\leqq g(x)$ なので
$\mathrm{S}=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}\,dx$ ･･･①と表すことができる。ここで，$g(x)-f(x)=0$ が２次方程式で実数解 α,β をもつことと，$g(x)-f(x)$ の２次の項の係数が，$-a$ であることから，因数定理より b,c,m,n を用いずに，$g(x)-f(x)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される。
したがって①は，$\mathrm{S}=\int_\alpha^\beta\{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx$ と変形できる。
S は（ア）の等式を用いて$\mathrm{S}=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ となり，a,α,β のみで表すことができる。

2（20点）

（１）

【不十分である理由】
Aさんは $\log_3(x+1)^2=2\log_3(x+1)$ と変形したが，左辺と右辺の真数条件が異なってしまい同値変形になっていないから。
（左辺：$x\neq-1$，右辺：$x>-1$）

【正しい解答】
$$\log_3(x+1)^2=2$$
$$2\log_3|x+1|=2$$
$$|x+1|=3$$
$$x=-4,2$$

〈 別解 〉
$$\log_3(x+1)^2=2$$
$$(x+1)^2=9$$
$$x=-4,2$$

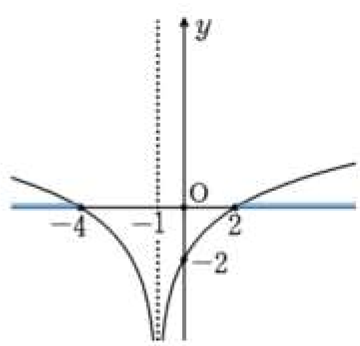
（２）

【具体的な指導例】

- $y=\log_3 x^2$ のグラフをもとに $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフを考えさせる。
- $f(x)=\log_3 x^2$ とおくと $f(-x)=f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称である。$x>0$ のとき $f(x)=2\log_3 x$ であるから，（1，0）を通る単調増加のグラフである。よって，$x<0$ のとき（-1，0）を通る単調減少のグラフとなる。
- 関数 $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフは，$f(x)=\log_3 x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したグラフである。
  直線 $x=-1$ に関して線対称であり，$x=-1$ を漸近線にもつグラフである。他にも $x>-1$ のとき単調増加，$x<-1$ のとき単調減少で，
  $\lim_{x\to\infty}y=\infty$，$\lim_{x\to-1+0}y=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty}y=\infty$，$\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$
  などの特徴がある。
- $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ とおいた方程式 $\log_3(x+1)^2=2$ の解であるので，$x=-4,2$ が得られる。
- $\log_3(x+1)^2-2>0$ の解は，グラフにおいて，$y>0$ となる x の値の範囲であるから　$x<-4$，$2<x$ がグラフから得られる。

【 グラフ 】

$y=\log_3(x+1)^2-2$



3 16点	【 $\overline{y}=a\overline{x}+b$ の証明】 $y_1=ax_1+b$, $y_2=ax_2+b$, …… , $y_n=ax_n+b$ 　であるから 変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ は $\overline{y}=\frac{1}{n}\{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots\cdots+(ax_n+b)\}$ $=\frac{1}{n}\{a(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+nb\}=a\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+b=a\overline{x}+b$
	【$v_y=a^2v_x$ の証明】例① $y_k-\overline{y}=(ax_k+b)-(a\overline{x}+b)=a(x_k-\overline{x})$ （$k=1,2,3,\cdots\cdots,n$）であることから 変量 y のデータの分散 v_y は $v_y=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2\}$ $=a^2\cdot\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}=a^2v_x$ 【$v_y=a^2v_x$ の証明】例② $y_k-\overline{y}=(ax_k+b)-(a\overline{x}+b)=a(x_k-\overline{x})$ （$k=1,2,3,\cdots\cdots,n$）であることから， 変量 y のデータの分散 v_y は $v_y=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^2(x_k-\overline{x})^2$ $=a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=a^2v_x$
4 14点	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{7}{3}$ ……① とする。自然数の最小性より $\frac{1}{x}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{7}{3}$ から $\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{2}$ となり $x\leqq2$ を得る。x は自然数より，$x=1,2$ の場合を考える。 （ｉ）$x=2$ のとき ①に代入して，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{11}{6}$ 自然数の最小性より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{11}{6}$ から $y\leqq1$ となり $y=1$ を得る。 ①へ $x=2$, $y=1$ を代入すると $\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{5}{6}$ となる。 自然数の最小性より $\frac{1}{2z}+\frac{1}{3}\geqq\frac{5}{6}$ から $z\leqq1$ より $z=1$ を得る。 したがって $w=1$ を得る。 ∴①を満たす自然数の組は $(x,y,z,w)=(2,1,1,1)$ となる。 （ⅱ）$x=1$ のとき ①に代入して，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{4}{3}$ 自然数の最小性より $\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{4}{3}$ から $y\leqq2$ となり $y=1$ または $y=2$ （ア）$x=1$, $y=2$ のとき （ｉ）と同様であるから，$z=1$, $w=1$ を得る （イ）$x=1$, $y=1$ のとき $\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{1}{3}$ となり $(2z-3)(w-1)=3$ と変形できる よって $(2z-3, w-1)=(1,3),(3,1)$ ゆえに $(z,w)=(2,4),(3,2)$ （ｉ），（ⅱ）より，①を満たす自然数の組は， $(x,y,z,w)=(2,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,4),(1,1,3,2)$ の４組である。
5 20点	（１） 無限級数の一般項 a_n を $a_n=\frac{-1}{n^2+3n+2}$ とおき，次のように変形する。 $a_n=\frac{-1}{n^2+3n+2}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ 　ここで，数列 a_n の初項から第 n 項までの和を S_n とすると $\mathrm{S}_n=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$ $\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}$ 　したがって，この無限級数は収束し，その和は $-\frac{1}{2}$ である。
	（２） 初項 a_1 から第 k 項 a_k までの和を S_k とする。 （ア）$k=2m-1$ のとき 　$\mathrm{S}_k=\mathrm{S}_{2m-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdots\cdots-\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$ $k\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから $\lim_{k\to\infty}\mathrm{S}_k=\lim_{m\to\infty}\mathrm{S}_{2m-1}=\frac{1}{2}$ （イ）$k=2m$ のとき，第 $2m$ 項を a_{2m} とすると，$\mathrm{S}_k=\mathrm{S}_{2m}=\mathrm{S}_{2m-1}+a_{2m}=\frac{1}{2}-\frac{m+1}{m+2}=\frac{-m}{2(m+2)}$ $k\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから $\lim_{k\to\infty}\mathrm{S}_k=\lim_{m\to\infty}\mathrm{S}_{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2(1+\frac{2}{m})}=-\frac{1}{2}$ （ア），（イ）より，この無限級数は発散する。