

天然生カラマツに対する経済的採材法の研究

(第 1 報)

幹曲線に対する直交多項式のあてはめ

阿 部 昌 夫

Studies on economic log-making for Japanese larch (*Larix leptolepis*) trees in natural forest.

1. Application of orthogonal polynomial equation for stem curve.

Masao ABE

Abstract: As the timber price is usually determined by its top diameter and length in Japan, the price differ with the method of log-making. For this reason, an attempt was made to obtain the heighest economic yield on the wild tree of Japanese larch in northern region of Yamanashi Prefecture.

At the first of studies, the normalized stem curve was estimated by use of statistical techniques. 31 sample trees were collected, and the diameters in each tree were measured and averaged at each point divided the stem into ten part with same interval. Using of these data, following polynomial equation was obtained according to the R. A. Fisher's method, viz, orthogonal polynomial equation.

$$Y=41.2-66.4X+47.5X^2-6.8X^3+0.3X^4$$

要 旨 この報告では、現地で集めた天然生カラマツ資料材にもとづき、統計的手法により求めた基準材につき曲線回帰を利用し幹曲線を求めた。その方法として直交多項式をあてはめた結果、次の4次の多項方程式を得た。

$$Y=41.2-66.4X+47.5X^2-6.8X^3+0.3X^4$$

ま え が き

秩父山系山梨県側の主として谷合に自生するカラマツ天然木は、きわめて優勢な生長をなす材質すぐれた貴重材であるが、このような貴重材からの丸太採材にも従来は現場でのカンによる採材慣習がおこなわれ、その歩止りは必ずしも最高の経済効率を得てはいないようである。

そこで、本研究では現地で収集した資料材にもとづき統計的手法により幹曲線式を求め、それから得る基準材について各種の造材ならびに運材費要素の組合せを試行し、最高の経済的歩止りを得るための丸太採材法について、経済的分析手段をもちいて考察することにした。

本稿においては、先ず樹幹の形状を把握するため資料材の分析統計値に直交多項式をあてはめることにより幹曲線式を算定した結果につき第1報として報告する。

調査地ならびに調査資料

本研究に用いた資料は、山梨県東山梨郡三富村に所在する県有林笛吹川事業区42林班内で、昭和34年度本県材積表検定資料として蒐集した天然生カラマツ主伐相当木31本を対象に使用したが、その平均直径 36.6 cm, 平均樹高 26.7 m であって、本地方産材としては概ね中庸の材であった。

資料収集箇所の地況、林況ならびに胸高直径階、樹高階別本数を示せば第1表、第2表のとおりである。

第1表 資料収集箇所地況、林況

地 況

事業区	林班小班	標高 m	地質	土壌	方位斜	雨量 mm	年平均 温度
笛吹川	42.ち	1550	花崗岩	B _E	SW 5	1260	三富 12.0

林 況

事業区	林班小班	成立	林令	立木本数	間伐年	生育
笛吹川	42.ち	天然	150 } 100	ha当	—	上

第2表 胸高直径階、樹高階別本数表

笛吹川事業区 (天然木)

D m	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	計
19	1																		1
20																			0
21							1												1
22								1											1
23																			0
24					1	1		1			1								4
25						1											1		2
26				1			1			1	1	2							6
27									1		1	1	1	1					5
28																			0
29															3			1	4
30													1	1			1		3
31																1	1		2
32												1					1		2
計	1	0	0	1	1	2	2	2	1	1	3	4	2	2	3	1	4	1	31

これら単木の現地測定方法は、実材積を求積する目的から、地際高、伐採高（地上 20 cm）、胸高（地上 1.2m）、伐採高以上は 2 m 間隔毎に、先端部にいたり 1 m 部におけるそれぞれの樹幹直径（cm 単位で mm まで読む。）および樹幹長（m 単位で単位以下 2 位を 4 捨 5 入して 1 位にとどめる。）を実測してある。

統計的方法による幹曲線の考察

樹木の形状の変動性は、固有幹曲線を想定するにはあまりに複雑である。

統計的取扱いにおいては、幹長という独立変量の或特定値に対して、その点における各直径という従属変量の良い推定値を決めて不規則なデータをなめらかにしたり、観測された 1 連の数字のなかにふくまれないような独立変量 X の値に対して従属する推定値 Y の内挿をすることとなるのであるが、このような 2 つの変量の相関連する変動の状態を正確に記録する方法をみつけることは、いわゆる曲線のあてはめの問題であって、テーパーカーブとしてこれまでもいろいろの角度から研究されてきたが、一般にどのような方程式の曲線をあてはめるのが適当であるかをきめるのに定則はないのである。

その 1 つとして、筆者がここにとりあげた方法は、回帰曲線として直交多項式

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3 + \dots$$

をあてはめる特殊な方法であって、フィッシャーによって完成されている²⁾。

この曲線は非常に融通の利くもので、各種のデータに曲線をあてはめる場合にもちいられ、理論的にも価値があり、使用方法も容易である。その特徴とするところは、次々に高次の項をあてはめていった結果が各段階ごとに観察され、その有意性が検定されながら、この曲線のあてはめがどこまでも、しかもきわめて好都合に押し進められるところにある。

この方法を適用して本研究では区間樹高 X を 10 等分間隔の $n = 11$ 箇の点で与え、これらに対するその点の直径 Y の平均値を測って、5 次までの項による係数を算定することにした。

この係数値はフィッシャーの発表した一般式によった。すなわち

$$a = \frac{S_1}{n} = \bar{y}$$

$$b = \frac{(1)(2)}{n(n+1)} (S_2)$$

$$c = \frac{(1)(2)(3)}{n(n+1)(n+2)} (S_3)$$

$$d = \frac{(1)(2)(3)(4)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} (S_4)$$

$$e = \frac{(1)(2)(3)(4)(5)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} (S_5)$$

また第 2 の組の公式

$$a' = a$$

$$b' = a - b$$

$$c' = a - 3b + 2c$$

$$d' = a - 6b + 10c - 5d$$

$$e' = a - 10b + 30c - 35d + 14e$$

さらに第3の組の公式

$$A = a'$$

$$B = \frac{6}{n-1} (b')$$

$$C = \frac{30}{(n-1)(n-2)} (c')$$

$$D = \frac{140}{(n-1)(n-2)(n-3)} (d')$$

$$E = \frac{630}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} (e')$$

によった。

以上の計算手続により本調査資料につき実施した結果は、つぎのとおりとなった。

第3表 樹高の10等分点の平均直径 (mm)

位 置	本数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
笛吹川42	31	387	341	317	300	279	256	224	181	124	67	0

第4表 直交多項式のあてはめによる和と誘導値

Y_1	2	3	4	5	Y^2
67	67	67	67	67	4489
124	191	258	325	392	15376
181	372	630	955	1347	32761
224	596	1226	2181	3528	50176
256	852	2078	4259	7787	65536
279	1131	3209	7468	15255	77841
300	1431	4640	12108	27363	90000
317	1748	6388	18496	45859	100489
341	2089	8477	26973	72832	116281
387	2476	10953	37926	110758	149769
$S_1 = 2476$	$S_2 = 10953$	$S_3 = 37926$	$S_4 = 110758$	$S_5 = 285188$	$SY^2 = 702718$

$$a = 225.1 \quad b = 166.0 \quad c = 132.6 \quad d = 110.6 \quad e = 95.0$$

$$a' = 225.1 \quad b' = 59.0 \quad c' = -7.7 \quad d' = 2.1 \quad e' = 2.1$$

$$A = 225.1 \quad B = 35.5 \quad C = -2.6 \quad D = 0.4 \quad E = 0.3$$

次に平均からの偏差の平方和は

$$SY^2 - nA^2 \text{ から得られる。}$$

補正項は、 $nA^2 = \frac{(SY)^2}{n}$ であるから

$$\text{剰餘, } Sy^2 = SY^2 - nA^2 = SY^2 - \frac{(SY)^2}{n}$$

上記量をあてはめて $Sy^2 = 196017.9$ を得た。

これであてはめの第1段階は終り、水平な直線 $Y = 225.1$ がこのデータにあてはめられたのであって、これからの偏差の平方和が Sy^2 になるわけである。

第2段階以降における剰餘の計算に用いられる補正項はフィッシャーの示す次の公式によつた。

$$\begin{aligned} & \frac{n(n^2-1)}{12} (B^2) \\ & \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{180} (C^2) \\ & \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2800} (D^2) \\ & \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)}{44100} (E^2) \end{aligned}$$

上掲の公式によつて表の第2列の組より剰餘項を計算した結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} S(Y - \hat{Y})^2 &= 196017.9 - \frac{11(11^2-1)}{12} (35.5)^2 \\ &= 196017.9 - 138627.5 = 57390.4 \end{aligned}$$

したがつて直線回帰をあてはめたことによる平方和の減少は 138627.5 であつて、その自由度は 1 である。これを、その剰餘項 57390.4 と比較することにより、有意性を検定することにした。

すなわち、剰餘項の自由度は 9 であるから、誤差平均平方は、 $57390.4/9 = 6376.7$ となり、その結果 $F = 138627.5/6376.7 = 21.73$ は、d. f. = 1 および 9 に対し、F 表検出は 50% の点では、 $F_{.5}^9 = 0.494$ 、25% の点では $F_{.25}^9 = 1.512$ となるから、いちじるしく有意であることがわかつた。

ついで 2 次の項をあてはめると剰餘項の計算結果は

$$\begin{aligned} S(Y - \hat{Y})^2 &= 57390.4 - \frac{11(11^2-1)(11^2-4)}{180} (-2.6)^2 \\ &= 57390.4 - 5800.1 = 51590.3 \end{aligned}$$

ここで、検定をおこなうための誤差平均平方は、 $51590.3/8 = 6448.8$ であるから、

$F = 5800.1/6448.8 = 0.90$ となり、これは d. f. = 1 および 8 のところで見ると、25% の点では $F_{.25}^8 = 1.538$ を示し、いちじるしく有意であるとはいへない。さらに 50% の点では $F_{.5}^8 = 0.499$ で有意差は認められない。

次の段階で、3 次の項をあてはめてみるとその結果は、

$$\begin{aligned} S(Y - \hat{Y})^2 &= 51590.3 - \frac{11(11^2-1)(11^2-4)(11^2-9)}{2800} (0.4)^2 \\ &= 51590.3 - 988.4 = 50601.9 \end{aligned}$$

となる。これから、 $F = 988.4/7228.8 = 0.137$ となり、d. f. = 1 および 7 のところで 25% で、 $F_{.25}^7 = 1.573$ 、50% で $F_{.5}^7 = 0.506$ であるから、この減少には有意差はない。

以上、3 段階にわたつて、直線回帰をあてはめたことによる平方和の減少とその剰餘項とを比較す

ることにより、有意性をF検定した結果を求めたのであるが、この手つづきは、一応こゝで止め、 $1-R^2$ は、残った平方和の Sy^2 に対する比であるから

$$R = \frac{S_{xy}}{\sqrt{Sx^2 Sy^2}}$$

$$1-R^2 = 1 - \frac{(S_{xy})^2}{Sx^2 Sy^2} = \frac{Sx^2 Sy^2 - (S_{xy})^2}{Sx^2 Sy^2}$$

$$Sy^2 = 196017.9 \quad \text{残った平方和} \quad 50601.9$$

$$1-R^2 = 50601.9 / 196017.9 = 0.25814938$$

$$R^2 = 0.74185062$$

したがって $R=0.861$ となり、これは、推定値と実際の値との相関としては、かなり高く望みうる最大限といえる。しかしながら、3次式はおそらく蛇行曲線をあらわすので、幹曲線のデータには不適当であるかどうかを知るために、この曲線のあてはめを、さらに1段階つづけてみると

$S_5=285188$ から出発して、各組の最後の公式に次々に代入した結果

$$S(Y-\hat{Y})^2 = 50601.9 - \frac{11(11^2-1)(11^2-4)(11^2-9)(11^2-16)}{44100} (0.3)^2$$

$$= 50601.9 - 3706.6 = 46895.3$$

を得た。それから $F=3706.6/7815.9=0.474$

となり、d. f. = 1 および 6 のところで 25%点 $F_5^1=1.621$ 、50%点では $F_5^1=0.515$ で、この減少には有意差は認められず、以上の検定結果から、このデータによる曲線のあてはめによる適合度は高いものと認めて支障ないと判断された。

幹曲線方程式の算定

前述したとおり本研究における幹曲線方程式は次の形をとる。

$$Y = A + BX_1 + CX_2 + DX_3 + EX_4$$

ここに A, B, C, D, E は、第2表の最後に計算された量であり、 X_1, X_2, X_3, X_4 は、それ自身 X の多項式である。X の幅がこの場合等間隔にとつたので簡単に簡約した単位として、1, 2, 3, 4 としてあつかった。最後にフィッシャーによって次の1組の公式が必要なものとして提示されている。

すなわち

$$X_1 = X - \bar{x}$$

$$X_2 = X_1^2 - \frac{n^2-1}{12}$$

$$X_3 = X_1^3 - \frac{3n^2-7}{20}(X_1)$$

$$X_4 = X_1^4 - \frac{3n^2-13}{14}(X_1^2) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}$$

$$X_5 = X_1^5 - \frac{5(n^2-7)}{18}(X_1^3) + \frac{15n^4-230n^2+407}{1.008}(X_1)$$

第1表から $\bar{x}=6, n=11$ である。

したがって、

$$X_1 = X - 6$$

$$X_2 = (X-6)^2 - \frac{(11)^2 - 1}{12} = X^2 - 12X + 26$$

$$X_3 = (X-6)^3 - \frac{3(11)^2 - 7}{20}(X-6) = X^3 - 18X^2 + 90.2X - 109.2$$

$$X_4 = (X-6)^4 - \frac{3(11)^2 - 13}{14}(X-6)^2 + \frac{3(11^2 - 1)(11^2 - 9)}{560}$$

二項定理で計算し、整理した結果は

$$X_4 = X^4 - 24X^3 + 191X^2 - 564X + 468$$

4次以下の方程式ならば、今、このデータから、ただちに計算することができる。たとえば、最もよくあてはまる直線の式は、

$$Y = A + BX_1 = 225.1 + 35.5(X-6) = 35.5X + 12.1$$

となる。

一方、最もよい4次の多項式は

$$\begin{aligned} Y &= A + BX_1 + CX_2 + DX_3 + EX_4 \\ &= 225.1 + 35.5(X-6) - 2.6(X^2 - 12X + 26) \\ &\quad + 0.4(X^3 - 18X^2 + 90.2X - 109.2) \\ &\quad + 0.3(X^4 - 24X^3 + 191X^2 - 564X + 468) \\ &= 41.2 - 66.4X + 47.5X^2 - 6.8X^3 + 0.3X^4 \end{aligned}$$

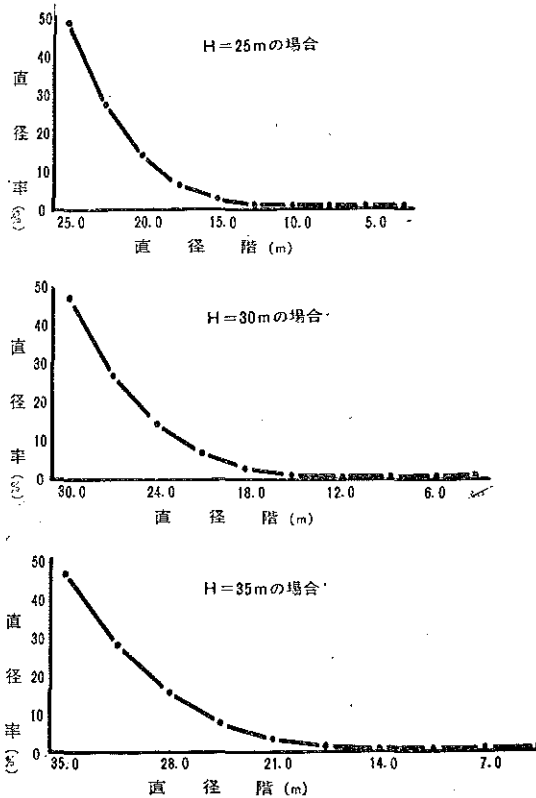
となる。この方程式のXに任意等間隔の値を代入し、多項式による値を計算し、またそれをグラフであらわすことになる。例えば樹高 H=25m, H=30m, H=35m の各々のばあいを想定し、樹高の10等分間隔によるXの数値を上記方程式に代入し計算した結果えたYは、第5表のとおり値をとり、これによりグラフにあらわすと、第1図に示すとおりとなる。

第5表 算出方程式による樹高別計算例

区分	H=25m		H=30m		H=35m	
	X	Y	X	Y	X	Y
0						
1	2.5	183.0 (0.2)	3.0	110.2 (0.1)	3.5	144.1 (0.0)
2	5.0	234.2 (0.3)	6.0	272.8 (0.1)	7.0	291.8 (0.1)
3	7.5	295.5 (0.4)	9.0	302.2 (0.1)	10.5	355.5 (0.1)
4	10.0	327.2 (0.4)	12.0	554.8 (0.3)	14.0	1287.2 (0.3)
5	12.5	676.0 (0.8)	15.0	1970.2 (0.9)	17.5	5119.0 (1.1)
6	15.0	1970.2 (2.4)	18.0	6071.2 (2.8)	21.0	14963.8 (3.2)
7	17.5	5119.0 (6.3)	21.0	14963.8 (7.0)	24.5	35014.7 (7.4)
8	20.0	11313.2 (14.0)	24.0	31337.2 (14.6)	28.0	70545.2 (15.0)
9	22.5	22024.5 (27.1)	27.0	58463.8 (27.3)	31.5	127909.5 (27.2)
10	25.0	39006.2 (48.1)	30.0	100199.2 (46.8)	35.0	214542.2 (45.6)
		81149.0 (100.0)		214245.4 (100.0)		470173.0 (100.0)

(括弧内は直径率)

第1図 算出方程式あてはめによる幹曲線図



ま と め

本研究の目的である最高の経済的造材歩止りを得るための丸太採材法について考察するにあたって、まず、現地収集の資料より得た基準材に対する幹曲線を求めることから出発した。

データの数字に一般にどのような方程式の曲線をあてはめるのが、このばあい適当であるかについて、クンツェ幹曲線式 [$y^2 = Px^r$]、三次式 [$y = ax - bx^2 + cx^3$]、寺崎式 [$y = Ae^{a(x-b/x)}$]、和田式 [$y^2 = a - bx^m$]、ペーレ式 [$d/D = l/(ca + bd)$] 等についても考察した結果、本報告に述べたように曲線回帰を利用して直交多項式をあてはめて幹曲線方程式を算定した。

直交多項式にあてはめればあいXの一段と高次の方式ほど一層データに忠実に接近し、その曲線は一段と近似的であることは勿論であるが、これからの研究資料として支障ない限り、実用上の点も考慮し、このばあい4次式であらわした。

参 考 文 献

- 1) 林業百科辞典：幹曲線．P．102，1961．
- 2) スネデカー：統計的方法（下）．P．379～388，1952．
- 3) 統計科学研究会編：統計数値表．P．237～246，1952．
- 4) 山梨県林業試験場：材積表の検定．第1報，1959，第2報，1960．