基本形状の表現式について
—p乗平均距離に基づく立体表現式の提案—

橘田　鉄雄

Function of Fundamental Figuration

要　　約

球および楕円体の式にならって立体の表現式を考案した。この式によれば基本的な形状を１つの式で表現でき、その表面を数式で計算できる。

１．表現式の誘導

楕円体の式は1）である。

$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ ……1)

1）式のように、他の基本的な形状も何等かの簡単な式で表現できないだろうか？

文献1）2）により、2次元のp乗平均距離の概念を拡張し直交３軸上の３定数、正の３パラメータおよび３変数合計９つの要素からなる2）式を導く。

$(x/a)^{p1} + (y/b)^{p2} + (z/c)^{p3} = 1$ ……2)

この式を充体の式（注１）ということにする。

２．表現式の検証

2）式において、３つのパラメータに特定値を設定してみる。対称性を考慮してxyを主とすると

$p1 = p2 = 1$, $p3 \to 0$ ：菱形柱　図１
$p3 = 1$ ：菱形８面体　図２
$p3 \to \infty$ ：xy部分平面とｚ軸　図３
$p1 = p2 = 2$, $p3 \to 0$ ：楕円柱　図４
$p3 = 1$ ：楕円算盤玉形　図５
$p3 \to \infty$ ：楕円逆紡錘形　図６
$p1 = p2 = p3 \to \infty$ ：直方体

というような曲面（８象限で立体）が表現できる。（任意のパラメータの値における精密計算には、大型計算機による計算が必要になるだろう）

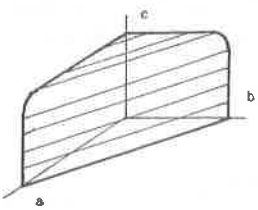

図１　菱形柱

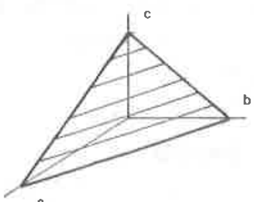

図２　菱形８面体

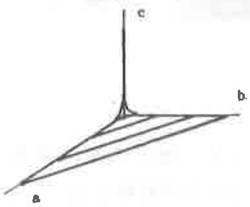

図３　xy部分平面とｚ軸

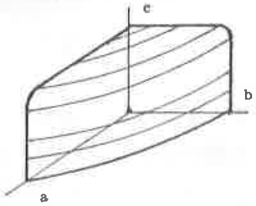

図４　楕円柱

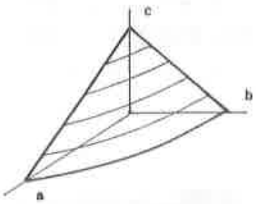

図５　楕円算盤玉形

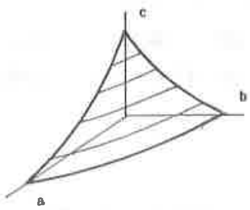

図６　楕円逆紡錘形

３．表現式の応用例

(1)　直方体の場合

ａ＝ｂ＝50㎜, ｃ＝0.5㎜とすると、１辺100㎜、厚さ１㎜の板状物体を表現できる。この物体を成形するとき、実際の加工現場では、誤差が許されるので、頂点（50, 50, 0.5）の近傍で、誤差 ε ＝0.01㎜とすると3）式をみたすｐの値を使用すれば、実用上 $p=\infty$ の効果を得ることができる。

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^p + \left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^p + \left(1-\frac{\varepsilon}{c}\right)^p = 1 \quad \cdots\cdots 3)$$

$$a = b = 50 \quad c = 0.5 \quad \varepsilon = 0.01 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4)$$

計算の結果 $p \fallingdotseq 3465.5$ が得られた（注２）

(2)　宝石の場合

適当なａ，ｂ，ｃにおいて、カボッションカット、

マーキスカットのｐは各３，1.5近辺である。

4．一般化

2）式のｘ，ｙの項を右辺に移項して5）式を得る。

$(z/c)^{p3}=1-(x/a)^{p1}-(y/b)^{p2}$……5)

ここで、ｘ，ｙの関数である右辺が１つの閉曲線（正多角形、多角形等）を描くとき、パラメータｐ３に対して計算で得られるｚ＝zkは、その関数の定義されるｘｙ平面のｚ座標になる。逆に与えられたzkにおける断面形状を、ｘとｙの関数で表すこともできる。

ｘ，ｙ，ｚの間に5）式の関係（拘束条件）がない場合には、ｚの１つの値に対して、１つ以上のｘ，ｙ関係式が必要になる。換言すると拘束条件がないものを自由形状と言うことができる。したがって、自由形状を精密に表現するためには、相当数の関係式が必要になることが推測できる。

5．まとめ

以上により充体の式に関して次のことがいえる。

(1)　多くの、基本的な形状は単純な式で表せる。

(2)　式のパラメータで特定の形状を区別できる。

(3)　零、無限大の効果を有限の値で代用できる。

ここで得られた充体の式は、球の式、楕円体の式と並んで、三次元加工において有用性を発揮すると思われる。たとえば、二次元における円弧補間に対して三次元における非球面補間である。

充体に対して環体という概念をも提案したいが、詳細は別にまとめたい。

注１　球と同相の物体をいうことにする。

注２　NEC製 PC9801 および MS－C による。

参考文献

1）安藤安美
ベクトル解析入門現代数学社（1979年）

2）藤巻・橘田・中山
貴金属製品の三次元原型・加飾加工技術の開発
昭和62年度山梨県工業技術センター研究報告（1988年）